

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIA SHS

Espaces euclidiens

Examen terminal 2nd session, le 11 juin 2025, 10h30–12h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
- b. Déterminer les valeurs propres de A .
- c. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer une matrice réelle inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Sinon, dire pourquoi elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- d. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Si oui, déterminer une matrice complexe inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Sinon, dire pourquoi elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$Q(w, x, y, z) = wx + xy + yz - zw.$$

Soit A la matrice de la forme bilinéaire symétrique Φ associée à Q .

- a. Donner A .
- b. Diagonaliser Q par la méthode de Gauss.
- c. Quelle est la signature de Q ?
- d. Déterminer une matrice 4×4 inversible P telle que tPAP soit diagonale avec tous les coefficients diagonaux égaux à ± 1 .
- e. Vérifier en effectuant le calcul que tPAP est bien une matrice diagonale avec tous les coefficients diagonaux égaux à ± 1 .

Exercice 3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- a. Dire pourquoi A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ sans faire de calcul.
- b. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

T. S. V. P.

- c. Déterminer les valeurs propres de A .
- d. Donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- e. Vérifier qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

T. S. V. P.